

## SISTEMI APERTI

### Argomenti trattati:

- Sistemi aperti in regime stazionario
- Equazione di bilancio dell'energia → Equazione di Bernoulli (se è un'equazione conservativa)
- Perdite di carico → Equazione integrata di Navier
- Velocità torricelliana
- Pompe e loro proprietà
- Esercizi e problemi risolti

Innanzitutto, ha senso parlare di sistemi aperti solo per quanto riguarda i fluidi, non per i solidi.

A differenza dei sistemi chiusi, che mantengono sempre la stessa massa, i sistemi aperti si dicono tali perché hanno dei “buchi” detti sezioni, dalle quali il fluido può entrare ed uscire : per questo le sezioni si distinguono in sezioni d'ingresso e sezioni di uscita.

Facciamo ora alcune ipotesi semplificative:

1. Poiché le sezioni sono piccole rispetto al resto della superficie del sistema, consideriamo le proprietà termodinamiche del fluido costanti in tutti i punti della sezione;
2. Il calore entra ed esce dal sistema solo dalla superficie impermeabile del sistema stesso : non c'è quindi flusso di calore nelle sezioni. Questo implica che il fluido abbia la sempre la stessa temperatura, passando da una parte all'altra della sezione.
3. Sulle sezioni d'ingresso e di uscita agiscono solo i **lavori di pistonamento**: consideriamo la massa  $dM$  del fluido che entra nell'unità di tempo nella sezione 1; col trascorrere del tempo la massa  $dM$  si sposta dalla sezione verso la sezione 2 a causa della pressione esercitata dal fluido più esterno. Si ha quindi il prodotto di una forza (pressione) per uno spostamento : sulle sezioni agisce quindi un lavoro.

$$dL = p A dx = p dV$$

$$\Downarrow$$

$$L_p = p_1 V_1 \tag{1}$$

dove

$p$  è la pressione

$A$  è la superficie della sezione

$dx$  è lo spostamento

$L_p$  è il lavoro di pistonamento

$$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} A dx = dV \quad \text{volume}$$

Risulta quindi che il lavoro di pistonamento sulla sezione 1 è uguale al prodotto della pressione per il volume, entrambi del fluido in ingresso dalla sezione 1.

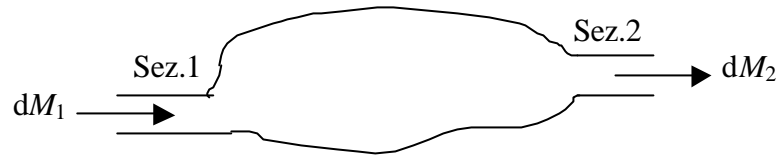


Fig.1

Abbiamo parlato prima di massa nell'unità di tempo : questo equivale a parlare di **portata**.

■ **Def.** Portata è la quantità di fluido che passa nell'unità di tempo attraverso una determinata sezione trasversale di una corrente.

Essa può venire valutata sia in termini di massa (e quindi misurata in kg/s) oppure in termini di volume (e quindi misurata in  $m^3/s$ ).

Indichiamo con  $\dot{M}$  la portata in massa (cioè la massa nell'unità di tempo) e con  $\dot{V}$  la portata in volume.

Consideriamo inoltre solo **sistemi aperti in regime stazionario** : in tal caso, la massa di fluido che si trova tra le due sezioni del condotto rimane costante (non abbiamo cioè né accumuli né fughe di fluido, ma la quantità di fluido che entra è uguale alla quantità di fluido che esce).

Individuata la sezione 1 come la sezione d'ingresso e la sezione 2 come la sezione di uscita, vale allora l'**equazione di conservazione della massa** :

$$\dot{M}_1 = \dot{M}_2 \quad (2)$$

La portata in massa è allora una costante del sistema.

### BILANCIO DELL'ENERGIA DI UN SISTEMA APERTO

Consideriamo il tempo  $\tau_0$  e chiamiamo  $E_V$  ("energia vecchia") l'energia al tempo  $\tau_0$ .

Chiamiamo invece  $E_N$  (energia "nuova") l'energia al tempo  $\tau_{0+1s}$  (cioè  $\tau_0 + 1$  secondo).

$$\tau_0 \rightarrow E_V = E_{rec} + E_1$$

dove  $E_1$  è l'energia della massa  $dM_1$  e  $E_{rec}$  è l'energia del recipiente.

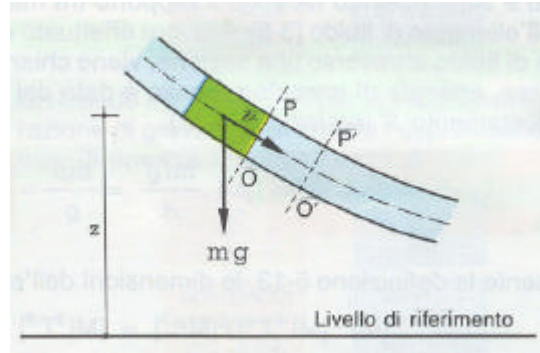
$$\tau_{0+1s} \rightarrow E_N = E_{rec} + E_2 + Q - L_{tot}$$

dove  $E_2$  è l'energia della massa  $dM_2$ ,  $Q$  è il calore che entra e  $L_{tot}$  è il lavoro totale compiuto, cioè la somma dei lavori di pistonamento e di eventuali lavori prodotti da un albero motore.

Dal tempo  $\tau_0$  al tempo  $\tau_{0+1s}$  la massa del fluido si è spostata ma per il principio di conservazione dell'energia  $E_V = E_N$  allora :

$$E_V = E_N \Rightarrow E_1 - E_2 = Q - L_{tot} \Rightarrow E_1 - E_2 = Q - (L + L_p) \quad (3)$$

Ma  $E_1$  e  $E_2$ , cioè l'energia totale della massa  $dM_1$  rispettivamente al tempo  $\tau_0$  e  $\tau_{0+\Delta s}$ , non è altro che la somma dell'energia interna, dell'energia potenziale e dell'energia cinetica della massa  $dM_1$ . Infatti l'elemento di fluido di massa  $dM_1$  che si muove lungo un condotto possiede un'energia potenziale (originata dal fatto di trovarsi a una determinata quota  $z$  sul livello del mare), un'energia cinetica (determinata dalla sua velocità  $W$ ) e un'energia interna. (Fig.2)



**Fig.2.** Energia di un fluido in moto.

Allora, raccogliendo la massa  $\dot{M}$  e sostituendo, la (3) diventa :

$$\dot{M} [(e_{cin2} + e_{pot2} + u_2) - (e_{cin1} + e_{pot1} + u_1)] = [q - l - (p_2v_2 - p_1v_1)] \dot{M} \quad (4)$$

dove

$$q = \frac{Q}{\dot{M}}$$

$$l = \frac{L}{\dot{M}}$$

$$p_2v_2 - p_1v_1 = L_p$$

Sappiamo poi che l'energia è, come il lavoro, data dal prodotto di una forza per una distanza; le sue dimensioni sono quindi  $[ML^2T^{-2}]$  e viene misurata in joule  $[1J = Nm]$ .

L'elemento di fluido di massa  $M$  [kg], che si trova soggetto all'azione dell'accelerazione di gravità  $g$  [ $m/s^2$ ], dà origine a una forza : è la forza peso  $Mg$  [N]; questa forza moltiplicata per lo spostamento  $z$  [m], che potrebbe subire l'elemento qualora fosse portato alla quota del livello del mare, dà origine a un'energia  $[Nm = J]$  l'**energia potenziale** appunto (potenziale perché è energia posseduta in potenza dall'elemento di fluido e diviene attuale solo quando si realizza la variazione di quota  $z$ ). Allora

$$E_{pot} = Mgz$$

Nota poi la velocità  $W$  dell'elemento di fluido di massa  $M$ , l'**energia cinetica** è espressa da :

$$E_{cin} = M \frac{W^2}{2}$$

Note allora l'energia potenziale e l'energia cinetica, la (4) diventa :

$$\dot{M} \left[ \left( \frac{W_2^2}{2} + gz_2 + u_2 + p_2 v_2 \right) - \left( \frac{W_1^2}{2} + gz_1 + u_1 + p_1 v_1 \right) \right] = [q - l] \dot{M} \quad (5)$$

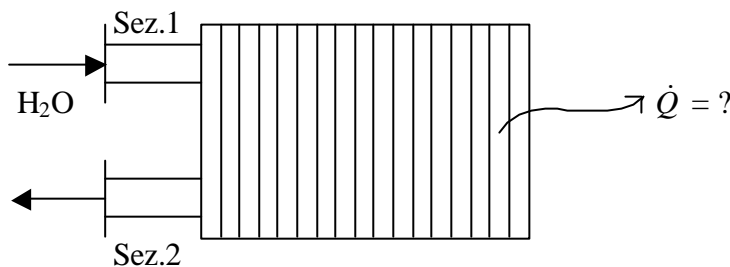
ma  $u + pv = h$  (entalpia); allora dividendo per  $\dot{M}$  la (5) diventa:

$$\frac{W_2^2 - W_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) + h_2 - h_1 = q - l \quad (6)$$

La (6) rappresenta l'equazione di bilancio dell'energia scritta in forma termica (si usa nei problemi di scambio termico).

□ **PROBLEMA**

Consideriamo un corpo scaldante (termosifone) :



Dati  
 $T_1 = 80^\circ\text{C}$   
 $T_2 = 70^\circ\text{C}$   
 $\dot{M} = 0,1 \text{ kg/s}$

Trovare la potenza termica  $\dot{Q}$ , cioè la quantità di calore che il corpo scaldante fornisce all'ambiente nell'unità di tempo. La potenza termica si misura in watt [W] e non in joule [J].

Dobbiamo applicare la formula (6), facendo attenzione però di considerare solo ciò che risulta compreso tra le sezioni 1 e 2 del sistema.

Se, come in questo caso, tra le due sezioni non è presente nessuna pompa, nell'equazione il lavoro è nullo e quindi il termine  $l$  non compare.

Inoltre, in questo caso i condotti 1 e 2 hanno la stessa sezione : l'acqua entra ed esce dal sistema con la stessa velocità  $W$ . Di conseguenza, non si ha variazione di energia cinetica perché appunto  $W_1 = W_2$ .

Approssimando, eliminiamo dall'equazione anche il termine  $g(z_2 - z_1)$  perché fornisce un contributo molto piccolo rispetto agli altri termini.

$$\cancel{\frac{W_2^2 - W_1^2}{2}} + \cancel{g(z_2 - z_1)} + h_2 - h_1 = q - \cancel{l}$$

Allora l'equazione (6) risulta così semplificata :  $q = h_2 - h_1$

$$\begin{aligned} &\Downarrow \\ q &= c_2(T_2 - T_1) \\ q &= 4187 \text{ J/kgK} \cdot 10 = 41870 \text{ J/kg} \end{aligned}$$

$$\text{Ma } \dot{Q} = q\dot{M} \Rightarrow \dot{Q} = 41870 \cdot 0,1 = 4187 \text{ W}$$

$\dot{Q} = 4187 \text{ W}$  è la potenza erogata da ogni kg d'acqua nell'unità di tempo.

L'equazione (6) di bilancio dell'energia può anche essere scritta in **forma meccanica** o **idraulica** (togliendo la parte termica):

■	$\frac{W_2^2 - W_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) + \frac{p_2 - p_1}{\rho} = -l \quad (7)$	(7)
---	--	-----

dove  $\frac{p_2 - p_1}{\rho}$  rappresenta il lavoro di pistonamento e  $\rho$  è la densità del fluido, che risulta essere una costante del fluido in ogni punto del condotto tra le due sezioni.

### PERDITE DI CARICO

Spesso nei sistemi aperti bisogna tenere conto delle perdite di carico, cioè di fenomeni dissipativi a causa dei quali una quota dell'energia meccanica si perde, o meglio si trasforma in energia termica per le dissipazioni provocate dall'attrito.

Quando si verificano perdite di carico, la (7) non risulta più essere un'equazione conservativa, ma bensì un'equazione che si chiude con un bilancio passivo. Per questo motivo alla (7) bisogna aggiungere il termine  $R$ , che rappresenta appunto la quota di perdita di carico e fa sì allora che l'equazione si chiuda in pareggio.

In un sistema in cui si verificano questo tipo di fenomeni dissipativi, è necessario inoltre introdurre una pompa per contrastare, appunto, le perdite di carico.

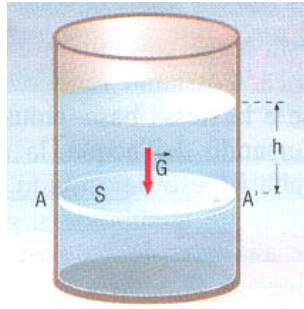
In realtà il termine *perdite di carico* non è preciso: il termine corretto sarebbe *perdite di resistenza*.

Nel caso di perdite di carico l'equazione (7) di bilancio dell'energia diventa:

■	$\frac{W_2^2 - W_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) + \frac{p_2 - p_1}{\rho} + R = -l \quad \left[ \frac{J}{kg} \right] \quad (8)$	(8)
---	--	-----

$R \rightarrow$  PERDITE DI CARICO o termine delle resistenze (si misura in metri d'acqua).  
La (8) si chiama **equazione integrata di Navier**.

Per misurare il carico non più in metri d'acqua ma in termini di pressione (come fanno gli idraulici), usiamo la **relazione di Stevino**: ogni strato orizzontale di liquido, che si trova ad una profondità  $h$ , subisce una pressione dovuta al peso della colonna di liquido che lo sovrasta. (Fig.3)



**Fig.3.** Rappresentazione grafica della legge di Stevino.

$$p = \frac{P}{A} = \frac{Vg\mathbf{r}}{A} = \frac{Ahg\mathbf{r}}{A} = hg\mathbf{r} \quad (9)$$

dove

$p$  è la pressione del fluido

$A$  è la superficie della sezione

$P = Vg\mathbf{r}$  è il peso del fluido (con  $V$  volume,  $g$  accelerazione di gravità e  $\mathbf{r}$  densità)

Quindi la pressione del fluido ad una profondità  $h$  è direttamente proporzionale alla densità del fluido, all'accelerazione di gravità e alla profondità stessa (9). Volendo ricavare il termine  $h$  :

$$h = \frac{p}{g\mathbf{r}} \quad (10)$$

La (9) e la (10) sono le relazioni che ci permettono di passare da metri di colonna d'acqua a pressione, e viceversa.

## RIASSUMENDO

- Se ci sono perdite di carico, l'equazione di bilancio dell'energia si chiama **equazione integrata di Navier** (8) :

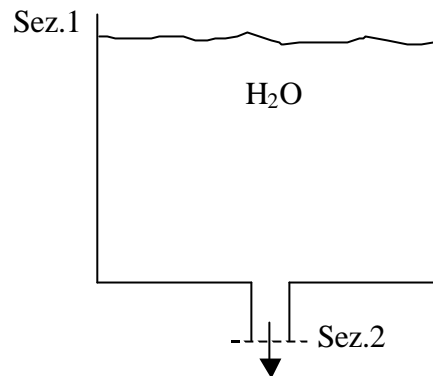
$$\frac{W_2^2 - W_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) + \frac{P_2 - P_1}{\mathbf{r}} + R = -l$$

- Se non ci sono perdite di carico, l'equazione di bilancio dell'energia è conservativa e si chiama **equazione di Bernoulli** (7) :

$$\frac{W_2^2 - W_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) + \frac{P_2 - P_1}{\mathbf{r}} = -l$$

□ **PROBLEMA**

Prendiamo un serbatoio con un “buco” e consideriamo lo svuotamento del serbatoio stesso.



Calcoliamo :

- $W = ?$  velocità di uscita
- $\dot{V} = ?$  portata in volume di uscita
- $\dot{M} = ?$  portata in massa di uscita

sapendo che  $z_2 - z_1 = -H = 5$  m e che la sezione 2 (sezione di uscita) ha un diametro di 5 cm.

N.B. Bisogna fare attenzione a scegliere bene le due sezioni!!

Qui prendiamo Sez.1 : pelo libero dell'acqua

Sez.2 : sbocco di uscita

Qui questa scelta è la migliore perché conosco già la pressione  $p_1$  e  $p_2$  delle due sezioni :  $p_1 = p_2 =$  pressione atmosferica. In questo modo quindi il termine

$\frac{p_2 - p_1}{\rho}$  dell'equazione (7) si può eliminare.

**r**

Il secondo vantaggio nel scegliere in questo modo le sezioni è che la velocità  $W_1$  con cui il pelo libero scende è infinitesima rispetto alla velocità di uscita, anche perché elevata al quadrato. Quindi  $W_1$  si può eliminare dall'equazione (7).

E' importante ricordare inoltre che sia da una sezione grande che da una sezione piccola il fluido esce sempre con la stessa velocità  $W$ , così come fanno sia un fluido pesante che un fluido leggero.

Inoltre, nella sezione 2 il liquido è in moto : possiede quindi un'energia cinetica e una quantità di moto. Il getto d'acqua ha una spinta che quindi non è data dalla pressione, ma è proporzionale alla quantità di moto (anche perché la pressione nella sezione 2 è uguale a quella atmosferica). Si dice spesso in questi casi che la pressione è nulla, ma è improprio dirlo.

Dall'equazione (7) eliminiamo anche il termine  $-l$  perché in questo caso, non essendoci pompe, non c'è lavoro, ma l'acqua scende solo grazie alla forza di gravità.

L'equazione (7) allora si può ridurre a

$$\frac{W_2^2}{2} + g(z_2 - z_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{W_2^2}{2} - gH = 0$$



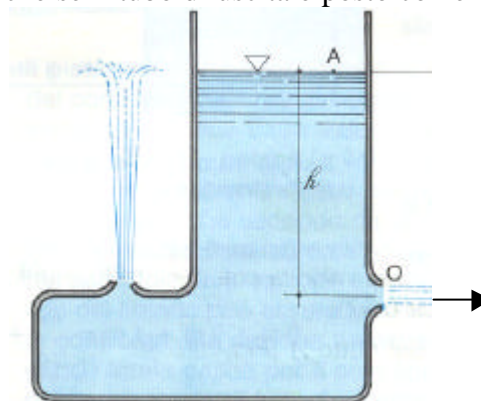
$$W_2 = \sqrt{2gH} \quad (11)$$

Abbiamo così ottenuto la formula della **velocità torricelliana** : la velocità di efflusso di un fluido da un serbatoio è direttamente proporzionale alla radice quadrata dell'altezza del liquido che si trova al di sopra del tubo di uscita.

Questa velocità quindi dipende solo dall'altezza  $H$  e non dalla sezione del tubo.

E' interessante notare come la velocità di efflusso  $W$  sia identica alla velocità raggiunta da un corpo in caduta libera : nessun corpo può cadere con una velocità superiore alla velocità torricelliana  $W$ .

La formula (11) vale anche se il tubo di uscita è posto come in fig.4 :

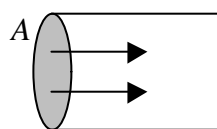


**Fig.4**

Calcoliamo allora  $\dot{V} = AW$

$$W = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 5} = 9,90 \text{ m/s}$$

$$A = \frac{\pi D^2}{4} = 3,14 \frac{0,05^2}{4} = 1,96 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$



$$\dot{V} = AW = 1,96 \cdot 10^{-3} \cdot 9,90 = 0,0194 \text{ m}^3/\text{s} = 19,4 \text{ l/s} \quad \text{portata in volume}$$

Calcoliamo adesso  $\dot{M} = \rho AW$



$$\dot{M} = 1000 \cdot 9,90 \cdot 1,96 \cdot 10^{-3} = 19,4 \text{ kg/s} \quad \text{portata in massa}$$

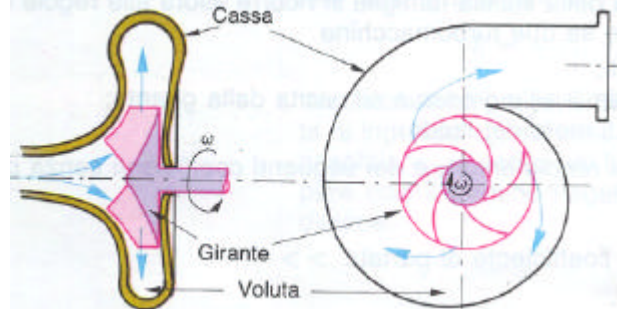
Notiamo allora che per l'acqua i kg sono uguali ai litri.

### MACCHINE IDRAULICHE

Le macchine idrauliche si dividono in due categorie : se la macchina idraulica aggiunge energia al fluido viene comunemente chiamata **pompa**, quando invece estrae energia abbiamo un motore solitamente rappresentato da una turbina idraulica.



La pompa è un dispositivo che fa aumentare la pressione del fluido che l'attraversa, ma non ne fa aumentare la velocità (se la sezione di uscita ha lo stesso diametro di quella di entrata). Noi ci occuperemo solo della prima categoria e in particolare di **pompe centrifughe**, cioè di pompe a flusso radiale. (Fig.5)

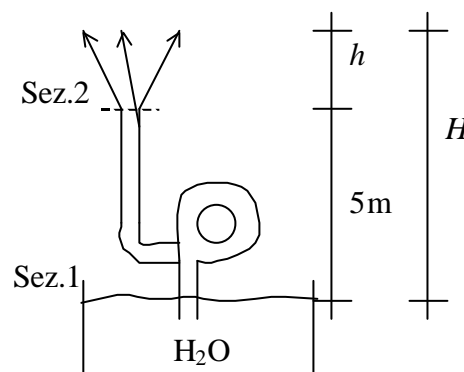


**Fig.5.** Schema di una pompa centrifuga.

### **PROPRIETA' DELLE POMPE**

- **PREVALENZA** : altezza massima raggiungibile dal fluido spostato dalla pompa. Nel Sistema Internazionale si misura in BAR, ma i venditori usano i metri d'acqua. La conversione  $1\text{Bar} = 10\text{ m d'acqua}$ .
- **PORTATA** : quantità di fluido spostato nell'unità di tempo (quando la pompa eroga la sua prevalenza normale). Nel Sistema Internazionale si misura in  $\text{kg/s}$ , ma nei cataloghi si trova espressa in  $\text{l/min}$  (litri al minuto).

### □ **PROBLEMA**



Calcoliamo l'altezza  $H$  dello zampillo, sapendo che le caratteristiche di questa pompa centrifuga sono :

- Prevalenza : 5BAR
- Portata : 0,1 kg/s

Sappiamo inoltre che  $z_2 - z_1 = 5\text{m}$ , ponendo anche in questo caso la sezione 1 al pelo libero dell'acqua e la sezione 2 allo sbocco di uscita. Come nel caso precedente, eliminiamo dall'equazione (7) il termine  $W_1$ , cioè la velocità con cui il pelo libero dell'acqua scende, perché infinitesima rispetto alla velocità di uscita; eliminiamo anche il termine  $\frac{p_2 - p_1}{\rho}$  perché  $p_2 = p_1 =$  pressione atmosferica.

A differenza però dell'esempio precedente, in questo caso tra le due sezioni è presente una pompa, quindi il termine  $-l$  non potrà essere eliminato.

L'equazione (7) risulta allora così semplificata :

$$\frac{W_2^2}{2} + g(5\text{m}) = -l \quad (12)$$

Consideriamo per un momento l'equazione di bilancio dell'energia relativo alla sola pompa, per riuscire a ricavare il termine  $-l$  :

$$\frac{p_2 - p_1}{\rho} = -l \Rightarrow -l = \frac{\Delta p}{\rho} \quad \text{posto } \Delta p = p_2 - p_1$$

Allora, l'equazione (12) diventa :

$$\frac{W_2^2}{2} + g(5\text{m}) = \frac{\Delta p}{\rho} \Rightarrow \frac{W_2^2}{2} + g(5\text{m}) = \frac{500000}{1000}$$

perché  $\Delta p = 5\text{BAR} = 500000 \text{ Pa}$  (sapendo che  $1\text{BAR} = 100000 \text{ Pascal}$ )

Allora :

$$\frac{W_2^2}{2} = \frac{500000}{1000} - 5(9,81) \Rightarrow W_2 = \sqrt{2(500 - 49,05)} = 30,03 \text{ m/s}$$

$$\text{Ma per la (11), } W_2 = \sqrt{2gh} \Rightarrow h = \frac{W_2^2}{2g} = \frac{30,03^2}{2 \cdot 9,81} = 45,9 \text{ m}$$

Ma  $H = h + 5\text{m} \Rightarrow H = 50,9 \text{ m}$  altezza dello zampillo cercata  
(non considerando le perdite di carico)